DENOMBREMENT

Cardinal d'un ensemble fini

Si $E \neq \varnothing$, c'est l'unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$.
$\text{Card}\, E = n$ est le nombre d'éléments de E et $\text{Card}\, \varnothing = 0$.

Propriétés :

- $\text{Card}\, \overline{A} = \text{Card}\, E - \text{Card}\, A$
- $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}\,(A \cap B)$
- $\text{Card}\,(A \cup B \cup C) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B + \text{Card}\, C - \text{Card}\,(A \cap B) - \text{Card}\,(A \cap C) - \text{Card}\,(B \cap C) + \text{Card}\,(A \cap B \cap C)$

Formule du crible : $\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \text{Card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right)$

- $\text{Card}\,(A \times B) = (\text{Card}\, A) \times (\text{Card}\, B)$

Partition

Une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ de parties de E est une partition de E si :

1) Leur réunion est égale à E : $E = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.
2) Elles sont deux à deux disjointes : $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

Alors $\text{Card}\, E = \text{Card}\, A_1 + \ldots + \text{Card}\, A_n$.

Notation factorielle

Si $n \neq 0$, $n!$ est le produit de tous les entiers compris entre 1 et n.
Par définition : $0! = 1$.
Propriété : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Nombre de p-listes avec répétition

Une p-liste avec répétition de E est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p.

Si $\text{Card} E = n$, le nombre de p-listes avec répétition de E est : n^p.
C'est aussi le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Nombre de p-listes sans répétition (arrangements)

Une p-liste sans répétition de E est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ où les x_i sont des éléments distincts de E.
Si $\text{Card} E = n$, le nombre de p-listes sans répétition de E est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{si } 0 \leq p \leq n \qquad\qquad A_n^p = 0 \ \text{ sinon}$$

C'est aussi le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Nombre de permutations

Une permutation de E est une bijection de E dans E. Si $\operatorname{Card} E = n$, une permutation de E correspond à une n-liste sans répétition de E.
Donc le nombre de permutations de E est $n!$.
C'est aussi le nombre de <u>bijections</u> de E dans F si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F = n$.

Nombre de parties à p éléments (combinaisons)

Si $\operatorname{Card} E = n$, le nombre de parties à p éléments est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \qquad \binom{n}{p} = 0 \text{ sinon}$$

<u>Propriétés</u> : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\qquad \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ si $1 \leq p \leq n$

<u>Formule de Vandermonde</u> : $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Nombre de manières d'ordonner des objets

Le nombre de manières d'ordonner n objets est : $n!$.

Nombre de tirages de p objets parmi n

- <u>Tirages successifs avec remise</u> : n^p.
- <u>Tirages successifs sans remise</u> : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$.
- <u>Tirages simultanés</u> : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$.