NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad z = x + iy$.

$x = \mathrm{Re}(z)$ est sa partie réelle et $y = \mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

z est réel ssi $\mathrm{Im}(z) = 0$ z est imaginaire pur ssi $\mathrm{Re}(z) = 0$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}.$$

Il y a bijection entre $\mathbb{C}$ et le plan de repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Tout point $M(x, y)$ a pour affixe $z = x + iy$.

Nombre complexe conjugué

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{z} = x - iy$ si $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

z est réel ssi $z = \overline{z}$ z est imaginaire pur ssi $z = -\overline{z}$

<u>Propriétés</u> : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Module d'un nombre complexe

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Le module de z est la distance OM si z est l'affixe de M.

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

<u>Propriétés</u> : $|z| = |\overline{z}|$ $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

$|zz'| = |z| \times |z'|$ $|z^n| = |z|^n$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Argument d'un nombre complexe non nul

Si $\boxed{z \neq 0}$ et si M est le point d'affixe z, $\arg(z)$ est l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ et par abus de langage toute mesure de cet angle.

Si $z \neq 0$: $\arg(z) = \theta \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

z est réel ssi $\arg(z) \equiv 0 \ (\pi)$

z est imaginaire pur ssi $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$

<u>Propriétés</u> : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ (2\pi)$ $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ (2\pi)$

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ (2\pi)$

Notion exponentielle

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique réel $r > 0$ et un réel θ unique à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) tels que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. Et $r = |z|$.

$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \ (2\pi)$

Formules d'Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Racines n-èmes d'un complexe non nul

Les racines n-èmes de Z sont les solutions de $z^n = Z$.

Si $Z = Re^{i\alpha}$, il y a n racines $z_k = \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Leur somme est égale à 0. Elles sont toutes obtenues en multipliant l'une d'entre elles par les racines n-èmes de l'unité.

Il y a n racines n-èmes de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = (\omega_1)^k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.