POLYNÔMES

Définitions

Un monôme sur K est de la forme aX^k où $k \in \mathbb{N}$ et $a \in K$.
Un polynôme P sur K est une somme finie de monômes.
Si le polynôme P n'est pas nul, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et un unique $(a_0, ..., a_n) \in K^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ tels que : $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$.
$a_0, \ldots, a_n$ sont les coefficients de P et a_n son coefficient dominant.
$K[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans K.

Degré d'un polynôme

Si P est non nul, n est unique et s'appelle le degré de P.
Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

$d°(P+Q) \leq \mathrm{Max}(d°P, d°Q)$ $\qquad$ $d°(PQ) = d°P + d°Q$

$d°(P \circ Q) = d°P \times d°Q$ $\qquad$ $d°P' = d°P - 1$ si $P' \neq 0$

$K_n[X]$ est l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $d°P \leq n$.

Egalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients.

Division euclidienne

Si A et B appartiennent à $K[X]$ et $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $K[X]$ tels que $A = BQ + R$ et $d°R < d°B$.
Si $R = 0$, A est divisible par B ou multiple de B, et B est diviseur de A.

Racines d'un polynôme

Un élément $\alpha \in K$ est racine du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.
α est racine de P si et seulement si P est divisible par $(X - \alpha)$.

Ordre de multiplicité d'une racine

α est racine d'ordre m de P si P est divisible par $(X-\alpha)^m$, mais pas par $(X-\alpha)^{m+1}$: $P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ et $d°Q = d°P - m$.
α est racine multiple d'ordre m du polynôme P si et seulement si :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!] \quad P^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Formule de Taylor

$$\forall P \in K_n[X] \quad \forall \alpha \in K \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k .$$

Théorème de D'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
<u>Conséquence 1</u> : Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
<u>Conséquence 2</u> : Un polynôme $P \in K_n[X]$ qui s'annule au moins $n+1$ fois est le polynôme nul.

Polynômes irréductibles

Un polynôme A non constant est irréductible dans $K[X]$ s'il n'admet pas de diviseur B dans $K[X]$ tel que $1 \leq d°B < d°A$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont de degré 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 avec $\Delta < 0$.

Factorisation d'un polynôme non constant

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme P non constant admet une factorisation de la forme : $P(X) = a\prod(X-\alpha_k)^{m_k}$ où a est le coefficient dominant de P et où les α_k sont toutes les racines complexes distinctes de P avec leur ordre de multiplicité m_k.
Si $P \in \mathbb{R}[X]$, ses racines dans $\mathbb{C}$ sont soit réelles soit complexes conjuguées avec le même ordre de multiplicité.
En calculant $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ on obtient un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de la forme X^2+bX+c avec un discriminant négatif.
Donc dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme P non constant admet une factorisation de la forme : $P(X) = a\left(\prod(X-\alpha_k)^{m_k}\right)\left(\prod(X^2+b_jX+c_j)^{m_j}\right)$ où a est le coefficient dominant de P, où les α_k sont toutes les racines réelles distinctes de P avec leur ordre de multiplicité m_k, et où les polynômes $X^2+b_jX+c_j$ ont un discriminant négatif et ont pour racines les racines complexes conjuguées de P, avec leur ordre de multiplicité m_j.